ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN SONG HÀ

XẤP XỈ NGHIỆM CHO BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI HỌ VÔ HẠN CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

Ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **9460102**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Nguyễn Bường

THÁI NGUYÊN - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường. Các kết quả trình bày trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan của mình.

Thái Nguyên, ngày ... tháng 8 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Song Hà

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TS. Nguyễn Bường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn vô cùng sâu sắc tới Thầy giáo hướng dẫn.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, thông qua các bài giảng, các buổi sinh hoạt chuyên môn, seminar và các hội thảo khoa học trong nước tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và những ý kiến đóng góp quý báu của GS.TSKH. Phạm Kỳ Anh, GS.TSKH. Lê Dũng Mưu, GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, GS.TSKH. Nguyễn Đông Yên, PGS.TS. Cung Thế Anh, PGS.TS. Phạm Hiến Bằng, PGS.TS. Đỗ Văn Lưu, PGS.TS. Hà Trần Phương, PGS.TS. Tạ Duy Phượng, PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, TS. Lâm Thùy Dương, TS. Nguyễn Công Điều, TS. Bùi Thế Hùng, TS. Đào Thị Liên, TS. Trịnh Thị Diệp Linh, TS. Nguyễn Thị Ngân, TS. Nguyễn Thanh Sơn, TS. Trương Minh Tuyên và TS. Vũ Mạnh Xuân. Từ đáy lòng mình tác giả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các Thầy, Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán, Phòng Đào tạo, Ban giám hiệu Trường Đại học Sư phạm và Ban chủ nhiệm Khoa Toán-Tin, Phòng Hành chính tổ chức, Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả có thể hoàn thành luận án của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm và các thầy cô giáo trong Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên cùng toàn thể các nghiên cứu sinh chuyên ngành Toán Giải tích, bạn bè đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến xác đáng cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu, seminar và hoàn thành luận án.

Tác giả xin kính tặng gia đình niềm vinh hạnh to lớn này.

Tác giả

Nguyễn Song Hà

Mục lục

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach thực
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
E^{**}	không gian đối ngẫu thứ hai của E
l^∞	không gian các dãy số bị chặn
l^p $(1 \leq p < \infty)$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
c	không gian các dãy số hội tụ
c_0	không gian các dãy số hội tụ về 0
$L^p[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$	không gian các hàm khả tích bậc p trên $[a,b]$
$C[a,b]$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide thực n chiều
$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\emptyset$	tập hợp rỗng
$\forall$	với mọi
$\cap$ hoặc $\bigcap$	phép giao
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
P_C	phép chiếu mêtric từ E (hoặc H) lên C
I	ánh xạ đơn vị
$\langle x, x^* \rangle$	giá trị của $x^* \in E^*$ tại điểm $x \in E$
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của $x \in H$ và $y \in H$
x^T	chuyển vị của véctơ x

J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
sgn	hàm dấu
μ	giới hạn Banach
$\nabla\varphi(x)$	gradient của hàm $\varphi(x)$
$R(F)$	miền ảnh của ánh xạ F
$D(F)$	miền xác định của ánh xạ F
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
$\mathrm{VIP}^*(F, C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân trên $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ với $F : E \to E$
$Sol(\mathrm{VIP}^*(F, C))$	tập nghiệm của bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$
A^{-1}	ánh xạ ngược của ánh xạ A
J_r^A	toán tử giải của ánh xạ A với $J_r^A := (I + rA)^{-1}$
J^A	toán tử giải của ánh xạ A tương ứng với $r = 1$
$\mathrm{Zer}(A)$	tập các không điểm của ánh xạ A
$\limsup_{k\to\infty} x_k$	giới hạn trên của dãy $\{x_k\}$
$\liminf_{k\to\infty} x_k$	giới hạn dưới của dãy $\{x_k\}$
$x_k \to x_0$	$\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới x_0
$o(\lambda_k)$	vô cùng bé bậc cao hơn λ_k

Danh sách bảng

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân đã được đề xuất vào những năm đầu của thập niên 60 thế kỉ XX, gắn liền với những nghiên cứu của Lions, Stampacchia và cộng sự [42], [66], [67]. Từ đó đến nay, bất đẳng thức biến phân luôn là một chủ đề nghiên cứu mang tính thời sự và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Nhiều bài toán như: bài toán cực trị [59], [100]; bài toán điểm bất động [1], [59]; bài toán cân bằng [36], [37], [60]; bài toán bù [35], [59]; phương trình với toán tử đơn điệu [2]; bài toán biên có dạng của phương trình đạo hàm riêng [15], [59] ... có thể quy về mô hình bài toán bất đẳng thức biến phân dưới các giả thiết thích hợp. Vì thế bài toán này là một công cụ mạnh và thống nhất trong nghiên cứu nhiều mô hình bài toán lí thuyết và ứng dụng thực tế.

Ở Việt Nam, theo nhiều con đường tiếp cận khác nhau, các nhà khoa học có những đóng góp quan trọng cho bài toán này có thể kể đến như các nhóm nghiên cứu của GS.TSKH. Phạm Kỳ Anh và TS. Đặng Văn Hiếu [4], [5]; GS.TSKH. Phan Quốc Khánh và TS. Trương Quốc Bảo [16], [17]; GS.TSKH. Đinh Thế Lục [33], [54], [69]; GS.TSKH. Lê Dũng Mưu và PGS.TS. Phạm Ngọc Anh [6], [7], [8], [9], [10], [11]; GS.TSKH. Phạm Hữu Sách và TS. Lê Anh Tuấn [78], [90]; GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn [13], [83]; GS.TSKH. Nguyễn Đông Yên và PGS.TS. Nguyễn Năng Tâm [62], [84]; GS.TS. Nguyễn Bường [22], [23], [25], [26]; PGS.TS. Nguyễn Quang Huy [45]; PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy [88] và TS. Bùi Trọng Kiên [56], [57] ... Bên cạnh đó, bất đẳng thức biến phân và một số bài toán liên quan cũng đã và đang là đề tài nghiên cứu của nhiều tác giả là tiến sĩ và nghiên cứu sinh trong nước như Phạm Thanh Hiếu [43]; Nguyễn Thị Thu Hương [44]; Phạm Duy Khánh [53]; Nguyễn Thị Hồng Phương [24]; Dương Việt Thông [87]; Lê Quang Thủy [12], [89] và Trương Minh Tuyên [58], [91], [92].

Mô hình bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển có dạng:

$$\text{Tìm } x_* \in C \text{ sao cho: } \quad \langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \tag{0.1}$$

trong đó C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert H và $F : H \to H$ là ánh xạ xác định trên H.

Trong trường hợp tập C của bài toán (0.1) được cho dưới dạng ẩn là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn hay vô hạn các ánh xạ không giãn thì bài toán (0.1) có liên hệ với nhiều bài toán thực tiễn như bài toán khôi phục tín hiệu [32], bài toán phân phối băng thông [47], [49], [50], kiểm soát năng lượng cho hệ thống mạng viễn thông CDMA [48] và kĩ thuật xử lí tín hiệu băng tần [79].

Để có thể ứng dụng bài toán bất đẳng thức biến phân vào thực tiễn, đòi hỏi phải có những phương pháp giải số hiệu quả cho bài toán này. Vì lẽ đó, một trong những hướng nghiên cứu quan trọng hiện nay dành được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước đó là việc đề xuất các phương pháp mới tìm nghiệm của bài toán (0.1) hoặc cải tiến hiệu quả của nhiều phương pháp đã có. Cho đến nay người ta đã thiết lập được nhiều kĩ thuật giải bất đẳng thức biến phân dựa trên phương pháp chiếu của Goldstein [39], Polyak [40], [64], [74], phương pháp điểm gần kề của Martinet [70], Rokaffellar [76], nguyên lý bài toán phụ của Cohen [29], phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder-Tikhonov [20], [86], phương pháp điểm gần kề hiệu chỉnh của Lehdili và Moudafi [63], Ryazantseva [77] và phương pháp điểm gần kề quán tính do Alvarez và Attouch [3] đề xuất hoặc dựa trên một số kĩ thuật tìm điểm bất động như phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann [61], [71], phương pháp lặp Halpern [41] và phương pháp xấp xỉ mềm [72].

Phương pháp lặp điển hình để giải bài toán (0.1) là phương pháp chiếu gradient [39], [100] được mô tả như sau:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{k+1} = P_C(I - \rho F)(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{0.2}$$

trong đó P_C là phép chiếu mêtric từ H lên C, I là ánh xạ đơn vị trên H và ρ là một hằng số dương cố định. Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu trong định lí dưới đây.